2/11/2020 – Théorie de Hodge pour les variétés riemanniennes (R. Pengo)

(Group du travail "Homologie stable réelle des groupes arithmétiques", ENS Lyon)

Plan

1. Variétés riemanniennes : définition, notion de distance
2. Découper une variété complète en compacts
3. Étoile de Hodge, volume riemannienne, formes de carré-sommable
4. Codifferentielle, laplacien, formes harmoniques
5. Théorèmes de Hodge, Kodaira, Andreotti-Vesentini & Borel (enoncées), formules de Stokes (enoncées).

Pourquoi? BA du SOLT : calculer $rg(K_i(\mathcal{O}_F))$,

F corps de nombres,

$K_i(\mathcal{O}_F) \rightsquigarrow H^i(SL_n(\mathcal{O}_F);\mathbb{R})$, $n \gg i$

En général, $H^i(\Gamma;\mathbb{R})$, $\Gamma \subseteq G(\mathbb{R})$, Γ arithmétique,

$G/\mathbb{Q}$ semi-simple.

$H^i(\Gamma;\mathbb{R}) \rightsquigarrow$ Formes différentielles sur X/Γ, où $X := K\backslash G(\mathbb{R})$,

$K \subseteq G(\mathbb{R})$ compact maximal. $\boxed{X \text{ est riemannienne}}$

M variété lisse, $E \xrightarrow{\pi} M$ fibré vectoriel, une métrique sur π est une collection $g = \{g_x\}_{x \in M}$ où

$$g_x : \underbrace{E_x}_{:= \pi^{-1}(x)} \times E_x \to \mathbb{R}$$

, bilinéaires, symétriques, non-dégénérées (i.e. $g_x(\underline{v}, \underline{w}) = 0$ si $\underline{v} = 0$ ou $\underline{w} = 0$),

telle que $\forall s, s' : \overset{U}{\overset{\cap \mid}{M}} \to E$ lisses, les applications

$$x \mapsto g_x(s(x), s'(x))$$

soit lisse.

M est une variété riemannienne si on a une métrique $\{\langle \cdot, \cdot \rangle_x\}_{x \in M}$ sur le fibré tangent $TM \to M$, et $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ est définie positive i.e. $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle_x \geq 0$, $\forall \underline{v}, \underline{w} \in T_x(M)$, $\forall x \in M$.

On denote $|\underline{v}|_x := \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle_x}$, $\forall \underline{v} \in T_x(M)$, $\forall x \in M$.

$$\begin{tikzcd}
T^*(M) \arrow[rr, "\#"] \arrow[dr, shift left] & & T(M) \arrow[dl, shift right] \\
& M \arrow[ul, bend left] \arrow[ur, bend right] &
\end{tikzcd}$$

l'isomorphisme musical

$\forall f \in C^\infty(M)$, on a le gradient

$$\nabla f : M \to TM, \quad (\nabla f)(x) := \#(df(x)).$$

En particulier, $\forall (X : M \to TM) \iff (X : C^\infty(M) \to C^\infty(M))$

on a $|X(f)(x)| = \langle (\nabla f)(x), X(x) \rangle_x$

M variété riemannienne connexe, on a une notion de distance

$$d(x,y) := \inf \left(L(\gamma) \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma : [a,b] \to M,\ \gamma(a) = x,\ \gamma(b) = y, \\ \gamma \text{ est } C^1 \text{ par morceaux} \end{array} \right)$$

où $L(\gamma) := \int_a^b |\underbrace{\gamma'(t)}_{\in T_{\gamma(t)}(M)}|_{\gamma(t)}\, dt$.

⚠ Pas trivial de voir que $d(x,y) \neq 0$ si $x \neq y$

[Klingenberg, 1.9.5]

M variété riem. est dite complète si (M,d) est complet.

Rmq. M compacte $\Rightarrow$ M complète (Bolzano-Weierstrass)

② **Prop.** M var. riem. connexe. M est complète $\Leftrightarrow$ $\exists \rho : M \to [0,+\infty)$ lisse, propre,

$$\max_{x\in M} |\nabla\rho(x)|_x < +\infty$$

Preuve ("$\Rightarrow$", esquisse) Choisit $x_0 \in M$, Soit $\rho_0 : M \to [0,+\infty)$, $\rho_0(x) := d(x,x_0)$.

ρ_0 est propre (Heine-Borel), continue, 1-lipschitzienne, i.e.

$|\rho_0(x) - \rho_0(y)| \le d(x,y) \Rightarrow |(\nabla\rho_0)(x)|_x \le 1$, $\forall x \in M$ t.q.

ρ_0 est lisse dans x. On veut régulariser ρ_0. $|\nabla\rho_\varepsilon(x)|_x$ bornée

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \rho_\varepsilon : M \to [0,+\infty)$ lisse, $\underbrace{|\rho_\varepsilon(x) - \rho_0(x)| < \varepsilon}_{\Rightarrow \rho_\varepsilon \text{ est propre}}$, $\underbrace{|\nabla\rho_\varepsilon(x)|_x \le |(\nabla\rho_0)(x)|_x + \varepsilon}_{\Rightarrow}$

Friedrich mollifier [Gaffney, §3]

Cor. M variété riem. complète et connexe, $\forall r > 0$ il existe on a :

$\exists\, C_r \subseteq D_r \subseteq M$ compacts, $\exists\, \sigma_r : M \to [0, +\infty)$ lisse t.q.

① $M = \bigcup_{r>0} C_r$ ② $C_r^{\circ} \subseteq C_{r'}$, $\forall r < r'$

③ $\sigma_r(C_r) = 1$ ④ $\sigma_r(M \setminus D_r) = 0$ ⑤ $|\nabla \sigma_r(x)|_x \leq \frac{C}{r}$

Dém. Choisit $m : \mathbb{R} \to [0,1]$ lisse t.q. $m([2, +\infty)) = 0$, $m([0,1]) = 1$.

Après $\sigma_r(x) := m(\rho(x)/r)$, $C_r := \sigma_r^{-1}(1)$, $D_r \supseteq M \setminus \sigma_r^{-1}(0) \supseteq C_r$

(3) M var. riem., $\langle \cdot,\cdot\rangle_x : \mathrm{Sym}^2(T_x(M)) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\Updownarrow$$

$$\left| \, (\cdot,\cdot)_x : \mathrm{Sym}^2(T_x(M)^\vee) \longrightarrow \mathbb{R} \, \right|$$

$V \in \mathrm{Vect}/\mathbb{R}$, $\langle \cdot,\cdot\rangle : \mathrm{Sym}^2(V) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall k \geq 1$,

$$\langle \cdot,\cdot\rangle : \mathrm{Sym}^2(\Lambda^k(V)) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle v_1 \wedge \dots \wedge v_k, w_1 \wedge \dots \wedge w_k \rangle := \det\left(\langle v_i, w_j\rangle\right)_{i,j=1}^{k}$$

$$\left\| \, \langle \cdot,\cdot\rangle : \mathrm{Sym}^2(\Omega^k(M)) \longrightarrow \Omega^0(M) = C^\infty(M) \, \right\|$$

$V \in \underline{Vect}^{\text{f.g.}}_{/\mathbb{R}}$, $d := \dim(V)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle : Sym^2(V) \to \mathbb{R}$. On fixe une isomorphisme $\det : \Lambda^d(V) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}$ qu'il est une isométrie ($\Leftrightarrow$ choisir une orientation de V, i.e. une composante convexe de $\Lambda^d(V) \setminus \{0\}$)

$\forall k \geq 1$,

étoile de Hodge

$$\star : \Lambda^k(V) \longrightarrow \Lambda^{d-k}(V)^{\vee} \xrightarrow{\simeq} \Lambda^{d-k}(V)$$

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} \Lambda^{d-k}(V) \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \det(x \wedge y) \end{pmatrix}$$

M variété riemannienne orientée:

$$\star : \Omega^k(M) \to \Omega^{d-k}(M), \text{ où } d := \dim(M)$$

$\omega := \star(1)$ volume riemannienne

$$\int_M (-)\,\omega \;:\; C^\infty(M) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_M : \mathrm{Sym}^2(\Omega^k(M)) \xrightarrow{\langle\cdot,\cdot\rangle} C^\infty(M) \xrightarrow{\int_M (\cdot)\omega} \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$\|\alpha\|_M := \sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle_M}$, si $\|\alpha\|_M < +\infty$, α est dite de carré sommable (L^2-forms)

$\Omega^k_{(2)}(M) \subseteq \Omega^k(M)$: formes de carré sommable

(4) $\star : \Omega^k(M) \to \Omega^{d-k}(M)$, $\star \circ \star = (-1)^{d(k+1)} \cdot \mathrm{Id}$

$\delta : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$, $\delta := (-1)^{d(k+1)+1} \cdot (\star \circ d \circ \star)$ Codifferentielle

$$\begin{tikzcd}
\Omega^k(M) \arrow[d, "\star"'] & \Omega^{k-1}(M) \\
\Omega^{d-k}(M) \arrow[r, "d"'] & \Omega^{d-(k-1)}(M) \arrow[u, "\star"']
\end{tikzcd}$$

$\Delta := d \circ \delta + \delta \circ d : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$ Laplacien

Une forme $\alpha \in \Omega^k(M)$ est harmonique si $\Delta(\alpha) = 0$.

$\mathcal{H}^k(M) := \ker(\Delta)$, $\mathcal{H}^k_{(2)}(M) := \mathcal{H}^k(M) \cap \Omega^k_{(2)}(M)$.

⑤ M variété riemannienne.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}^k_{(2)}(M) \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\mu"'] & \Omega^k_{(2)}(M)^{d=0} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \Omega^k(M)^{d=0} \arrow[d] \\ & H^k_{(2)}(M) \arrow[r, hook, "\nu"'] & H^k_{dR}(M) \end{tikzcd}$$

⚠ $H^k_{(2)}(M)$ vient par la cohomologie de $\underbrace{\Omega^\bullet_{(2)}(M)}_{\text{cohomologie } L^2}$

<u>Hodge</u> Si M est compacte, alors μ et ν sont isomorphismes

Si M est complète $\left\{\begin{array}{ll} [\mathcal{H}^k_{(2)}(M) = \Omega^k_{(2)}(M) \cap \ker(d) \cap \ker(\delta) & \text{Andreotti–Vesentini} \\ \mu \text{ est surjective} & \text{Kodaira } [\text{deRham, Thm. 14 et 24}] \\ [\mathcal{H}^k_{(2)}(M) \cap d\left(\Omega^{k-1}_{(2)}(M)\right) = 0 & \text{Prop. 2.5 de [Borel]} \end{array}\right.$

9/11

Pour les démonstrations, on utilise :

- $\langle X(f), g \rangle_M = - \langle f, X(g) \rangle_M$ $\left(\begin{array}{l} f, g \in \mathcal{C}^\infty(M),\ X : M \to TM \\ \text{hypothèses } 9/11 \end{array} \right)$

- $\langle d\alpha, \beta \rangle_M = \langle \alpha, \delta\beta \rangle_M$ $\left(\begin{array}{l} \alpha \in \Omega^k(M),\ \beta \in \Omega^{k+1}(M) \\ + \text{ hypothèses } 9/11 \end{array} \right)$